A Quantitative Dependent Type Theory with Recursion

Oskar Eriksson, Nils Anders Danielsson, Andreas Abel

2025-06-13

University of Gothenburg and Chalmers University of Technology

Previously

- Formalization of graded types
- “Counting” variable uses
- **Erasure**, Linear Types, Affine Types, . . .

Variable Counting

$$\frac{\gamma.\, x : p \blacktriangleright t}{\gamma \blacktriangleright \lambda^p x.t} \qquad \frac{\gamma \blacktriangleright t \qquad \delta \blacktriangleright u}{\gamma + p\delta \blacktriangleright t^p u}$$

$$\frac{\blacktriangleright \lambda^2 x.\lambda^0 y.x + x \qquad z : 1 \blacktriangleright z \qquad w : 1 \blacktriangleright w}{z : 2.\, w : 0 \blacktriangleright (\lambda^2 x.\lambda^0 y.x + x)^2 z^0 w}$$

Subsumption: Precision loss

$$\frac{\gamma \blacktriangleright t}{\delta \blacktriangleright t}\ \delta \leq \gamma$$

e.g. $$\frac{x{:}\{1\} \blacktriangleright x}{x{:}\{0, 1\} \blacktriangleright x}$$

Now

- How to handle recursion?

Now

- How to handle recursion?
- We consider natural numbers with natrec

Now

- How to handle recursion?
- We consider natural numbers with natrec
- We believe that the same ideas can be used for other types

Example: `plus`

$$\mathsf{plus} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$\mathsf{plus}\ m\ \mathsf{zero} = m$$

$$\mathsf{plus}\ m\ (\mathsf{suc}\ n) = \mathsf{suc}\ (\mathsf{plus}\ m\ n)$$

Example: `plus`

$$\mathsf{plus} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$\mathsf{plus}\ m\ \mathsf{zero} \quad = m$$
$$\mathsf{plus}\ m\ (\mathsf{suc}\ n) = \mathsf{suc}\ (\mathsf{plus}\ m\ n)$$

$$\mathsf{plus}_0\ m = m \qquad \text{-- 1}$$
$$\mathsf{plus}_1\ m = \mathsf{suc}\ m \qquad \text{-- 1}$$
$$\mathsf{plus}_2\ m = \mathsf{suc}\ (\mathsf{suc}\ m) \qquad \text{-- 1}$$
$$\vdots$$

Example: plus

$$\mathsf{plus} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$\mathsf{plus}\ m\ \mathsf{zero} = m$$
$$\mathsf{plus}\ m\ (\mathsf{suc}\ n) = \mathsf{suc}\ (\mathsf{plus}\ m\ n)$$

$$\mathsf{plus}_0\ m = m \quad \texttt{--}\ 1$$
$$\mathsf{plus}_1\ m = \mathsf{suc}\ m \quad \texttt{--}\ 1$$
$$\mathsf{plus}_2\ m = \mathsf{suc}\ (\mathsf{suc}\ m) \quad \texttt{--}\ 1$$
$$\vdots$$

We assign the grade corresponding to $\{1\}$

Example: `mult`

$$\mathsf{mult} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$\mathsf{mult}\ m\ \mathsf{zero} = \mathsf{zero}$$
$$\mathsf{mult}\ m\ (\mathsf{suc}\ n) = \mathsf{plus}\ m\ (\mathsf{mult}\ m\ n)$$

Example: `mult`

$$\mathsf{mult} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$\mathsf{mult}\ m\ \mathsf{zero} = \mathsf{zero}$$
$$\mathsf{mult}\ m\ (\mathsf{suc}\ n) = \mathsf{plus}\ m\ (\mathsf{mult}\ m\ n)$$

$$\mathsf{mult}_0\ m = \mathsf{zero} \quad \texttt{-- 0}$$
$$\mathsf{mult}_1\ m = \mathsf{plus}\ m\ \mathsf{zero} \quad \texttt{-- 1}$$
$$\mathsf{mult}_2\ m = \mathsf{plus}\ m\ (\mathsf{plus}\ m\ \mathsf{zero}) \quad \texttt{-- 2}$$
$$\vdots$$

Example: `mult`

$$\mathsf{mult} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$\mathsf{mult}\ m\ \mathsf{zero} = \mathsf{zero}$$
$$\mathsf{mult}\ m\ (\mathsf{suc}\ n) = \mathsf{plus}\ m\ (\mathsf{mult}\ m\ n)$$

$$\mathsf{mult}_0\ m = \mathsf{zero} \quad \texttt{-- 0}$$
$$\mathsf{mult}_1\ m = \mathsf{plus}\ m\ \mathsf{zero} \quad \texttt{-- 1}$$
$$\mathsf{mult}_2\ m = \mathsf{plus}\ m\ (\mathsf{plus}\ m\ \mathsf{zero}) \quad \texttt{-- 2}$$
$$\vdots$$

We assign the grade corresponding to $\{0, 1, 2, \ldots\}$

natrec

```
natrec :
  {A : ℕ → Set} (z : A zero)
  (s : (@p n : ℕ) → @r A n → A (suc n)) →
  (m : ℕ) → A m
natrec z s zero    = z
natrec z s (suc n) = s n (natrec z s n)
```

natrec

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{natrec} : \\
&\quad \{A : \mathbb{N} \to \mathsf{Set}\}\ (z : A\ \mathsf{zero}) \\
&\quad (s : (@\mathtt{p}\ n : \mathbb{N}) \to @\mathtt{r}\ A\ n \to A\ (\mathsf{suc}\ n)) \to \\
&\quad (m : \mathbb{N}) \to A\ m \\
&\mathsf{natrec}\ z\ s\ \mathsf{zero} \qquad = z \\
&\mathsf{natrec}\ z\ s\ (\mathsf{suc}\ n) = s\ n\ (\mathsf{natrec}\ z\ s\ n)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{natrec}_0\ z\ s = z && \texttt{-- 1} \\
&\mathsf{natrec}_1\ z\ s = s\ \mathsf{zero}\ z && \texttt{-- p + r} \\
&\mathsf{natrec}_2\ z\ s = s\ (\mathsf{suc}\ \mathsf{zero})\ (s\ \mathsf{zero}\ z) && \texttt{-- p + r(p + r)} \\
&\qquad\qquad \vdots
\end{aligned}
$$

natrec

$$\mathsf{natrec}_0\ z\ s = z$$ `-- 1`

$$\mathsf{natrec}_1\ z\ s = s\ \mathsf{zero}\ z$$ `-- p + r`

$$\mathsf{natrec}_2\ z\ s = s\ (\mathsf{suc}\ \mathsf{zero})\ (s\ \mathsf{zero}\ z)$$ `-- p + r(p + r)`

We assign the grade corresponding to $\{1, p + r, p + r(p + r), \ldots\}$

natrec

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{natrec}_0\ z\ s = z && \texttt{-- 1}\\
&\mathsf{natrec}_1\ z\ s = s\ \mathsf{zero}\ z && \texttt{-- p + r}\\
&\mathsf{natrec}_2\ z\ s = s\ (\mathsf{suc\ zero})\ (s\ \mathsf{zero}\ z) && \texttt{-- p + r(p + r)}
\end{aligned}
$$

We assign the grade corresponding to $\{1, p + r, p + r(p + r), \ldots\}$

That is, the grade $\bigwedge a_i$ where $\begin{cases} a_0 &= 1 \\ a_{i+1} &= p + ra_i \end{cases}$

natrec

$$\mathsf{natrec}_0\ z\ s = z \qquad \texttt{-- 1}$$

$$\mathsf{natrec}_1\ z\ s = s\ \mathsf{zero}\ z \qquad \texttt{-- p + r}$$

$$\mathsf{natrec}_2\ z\ s = s\ (\mathsf{suc}\ \mathsf{zero})\ (s\ \mathsf{zero}\ z) \qquad \texttt{-- p + r(p + r)}$$

We assign the grade corresponding to $\{1, p + r, p + r(p + r), \ldots\}$

That is, the grade $\bigwedge a_i$ where $\begin{cases} a_0 & = 1 \\ a_{i+1} & = p + ra_i \end{cases}$

Similar analysis gives uses by z and s

Correctness

- Is this analysis correct?

Correctness

- Is this analysis correct?
- Yes, Correctness proof via an abstract machine

Formalization

- Formalized in Agda
- Π, Σ, $\mathbb{N}$, $\bot$, $\top$, U_ℓ, $x =_A y$
- github.com/graded-type-theory/graded-type-theory